

**Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Московский физико-технический институт
(национальный исследовательский университет)»**

УТВЕРЖДЕНО

**Начальник
учебно-методического отдела
Т.Ф. Артеменко**

	Рабочая программа дисциплины (модуля)
по дисциплине:	Семинар по топологии I
по направлению:	Математика
профиль подготовки:	Фундаментальная математика Высшая школа современной математики Высшая школа современной математики
курс:	1
квалификация:	бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Зачет

Аудиторных часов: 30 всего, в том числе:

лекции: 0 час.

семинары: 30 час.

лабораторные занятия: 0 час.

Самостоятельная работа: 6 час.

Всего часов: 36, всего зач. ед.: 1

Программу составили:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

Программа обсуждена на заседании Высшая школа современной математики 02.09.2024

Аннотация

Большинство разделов современной математики используют основные понятия топологии, прогресс которой в XX и XXI веке сделал ее одной из основных математических дисциплин. Цель семинара – ознакомить студентов с базовыми понятиями и основными результатами топологии. Основное внимание уделяется основным понятиям топологии. В качестве базы даются понятия топологического пространства, компактности, CW-комплексов, гомотопий. Подробно разбираются компактные поверхности. В ходе семинаров изложение доводится до теоремы Брауэра о неподвижной точке, примеров вычисления фундаментальных групп и теории векторных полей.

1. Цели и задачи

Цель дисциплины

Формирование базовых знаний по топологии для дальнейшего использования в других математических дисциплинах; формирование математической культуры, исследовательских навыков и способности применять знания на практике.

Задачи дисциплины

- приобретение слушателями теоретических знаний и практических умений и навыков в области общей и маломерной топологии;
- подготовка слушателей к изучению смежных математических дисциплин;
- приобретение навыков в соотнесении топологических результатов с контекстом математических дисциплин

2. Перечень формируемых компетенций

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих компетенций:

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели

новые научные результаты	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

3. Перечень планируемых результатов обучения по дисциплине (модулю)

В результате освоения дисциплины обучающиеся должны

знать:

Основные понятия топологии и, более детально, теории поверхностей.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с топологическими и метрическими пространствами.

4. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и видов учебных занятий

4.1. Разделы дисциплины (модуля) и трудоемкости по видам учебных занятий

№	Тема (раздел) дисциплины	Трудоемкость по видам учебных занятий, включая самостоятельную работу, час.			
		Лекции	Семинары	Лаборат. работы	Самост. работа
1	Задачи на общие понятия топологического пространства и гомеоморфизма.		4		1
2	Основные топологические свойства пространств.		2		
3	Задачи о метрических пространствах.		2		1
4	Задачи на основные конструкции производных топологических пространств.		2		
5	Задачи о CW-комплексах и симплициальных комплексах.		2		1
6	Задачи по теории многообразий.		2		
7	Задачи по теории поверхностей.		4		1
8	Задачи на гомотопии.		4		
9	Задачи на понятие фундаментальной группы многообразия.		2		1
10	Задачи о накрытиях.		2		
11	Задачи о векторных полях.		4		1
Итого часов			30		6
Подготовка к экзамену		0 час.			

Общая трудоёмкость	36 час., 1 зач.ед.
--------------------	--------------------

4.2. Содержание дисциплины (модуля), структурированное по темам (разделам)

Семестр: 2 (Весенний)

1. Задачи на общие понятия топологического пространства и гомеоморфизма.

Топологическое пространство.

Примеры и задачи на понятие непрерывного отображения, гомеоморфизма.

Свойства и задачи о подмножествах конечномерного евклидова пространства и других примерах топологических пространств.

2. Основные топологические свойства пространств.

Задачи на понятия компактности, связности (линейной связности), на различные свойства отделимости.

3. Задачи о метрических пространствах.

Задачи на основные свойства метрических пространств. Индуцированная топология.

4. Задачи на основные конструкции производных топологических пространств.

Примеры и задачи на следующие конструкции: дизъюнктное объединение, прямое (декартово) произведение, фактор-пространства по различным отношениям эквивалентности, конус, надстройку, джойн.

5. Задачи о CW-комплексах и симплициальных комплексах.

Задачи на CW-комплексы и симплициальные комплексы.

Кусочно-линейные многообразия, их свойства, примеры вычислений с ними.

6. Задачи по теории многообразий.

Топологическое понятие многообразия, его иллюстрация в примерах и задачах.

Примеры: сфера, проективное пространство, тор.

7. Задачи по теории поверхностей.

Свойства и примеры: сферы с ручками, лист Мебиуса, бутылка Клейна.

Вычисление эйлеровой характеристики.

Задачи на топологическую классификацию поверхностей.

8. Задачи на гомотопии.

Задачи на понятия гомотопии и гомотопической эквивалентности.

Задачи на степень отображения из окружности в окружность

Теорема Брауэра о неподвижной точке и ее применение в задачах.

9. Задачи на понятие фундаментальной группы многообразия.

Задачи о фундаментальных группах.

Методы вычисления фундаментальной группы, примеры ее вычисления.

10. Задачи о накрытиях.

Понятие накрытия, примеры накрытий.

Задачи на универсальные накрывающие.

Соответствие между накрытиями и подгруппами фундаментальной группы, примеры на его использование.

11. Задачи о векторных полях.

Интегральные траектории и особые точки векторного поля.

Индекс векторного поля, его вычисление и использование.

Задачи на применение теоремы Пуанкаре о равенстве индекса и эйлеровой характеристики.

5. Описание материально-технической базы, необходимой для осуществления образовательного процесса по дисциплине (модулю)

Учебная аудитория, оснащенная мультимедиа проектором, экраном и микрофоном.

6. Перечень рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Современная геометрия : Методы и приложения [Текст] : [учеб. пособие для вузов] / Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко .— 5-е изд., испр. — М. : Эдиториал УРСС ; Добросвет, 2001 .— Т. 2 : Геометрия и топология многообразий. - 2001. - 296 с.

Дополнительная литература

1. Курс дифференциальной геометрии и топологии [Текст] : [учебник для вузов] / А. С. Мищенко, А. Т. Фоменко .— М. : Факториал Пресс, 2000 .— 448 с.
2. Введение в теорию множеств и общую топологию [Текст] / П. С. Александров - М. Физматлит, 2009

7. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет", необходимых для освоения дисциплины (модуля)

<https://old.mccme.ru/iu/courses.php>
<https://library.mccme.ru/>

8. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине (модулю), включая перечень необходимого программного обеспечения и информационных справочных систем (при необходимости)

На лекционных и практических (семинарских) занятиях могут использоваться мультимедийные технологии, включая демонстрацию презентаций, а также технологии дистанционной аудиовидеоконференцсвязи.

9. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины (модуля)

Методические указания приводятся в разрабатываемых аудиторных и домашних раздаточных материалах (листочках).

ПРИЛОЖЕНИЕ

ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)

по направлению: Математика
профиль подготовки: Фундаментальная математика
Высшая школа современной математики
Высшая школа современной математики
курс: 1
квалификация: бакалавр

Семестр, формы промежуточной аттестации: 2 (весенний) - Зачет

Разработчики:

А.Н. Соболевский, д-р физ.-мат. наук

М.А. Цфасман, д-р физ.-мат. наук

1. Компетенции, формируемые в процессе изучения дисциплины

Код и наименование компетенции	Индикаторы достижения компетенции
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1 Анализирует задачу, выделяя этапы ее решения, действия по решению задачи
	УК-1.3 Рассматривает различные варианты решения задачи, оценивает их преимущества и недостатки
	УК-1.2 Находит, критически анализирует и выбирает информацию, необходимую для решения поставленной задачи
	УК-1.4 Грамотно, логично, аргументированно формирует собственные суждения и оценки
ОПК-1 Способен применять фундаментальные знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, и использовать их в профессиональной деятельности	ОПК-1.1 Способен анализировать поставленную задачу, намечать пути ее решения
	ОПК-1.2 Способен строить математические модели, производить количественные расчеты и оценки
	ОПК-1.3 Способен определять границы применимости полученных результатов
ОПК-2 Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении	ОПК-2.2 Знает и умеет применять численные математические методы и прикладное программное обеспечение для решения научных задач в профессиональной области
ПК-1 Способен ставить, формализовывать и решать задачи, в том числе разрабатывать и исследовать математические модели изучаемых явлений и процессов, системно анализировать научные проблемы, получать новые научные результаты	ПК-1.1 Способен находить, анализировать и обобщать информацию об актуальных результатах исследований в рамках тематической области своей профессиональной деятельности
	ПК-1.2 Способен выдвигать гипотезы, строить математические модели для описания изучаемых явлений и процессов, оценивать качество разработанной модели
	ПК-1.3 Способен применять теоретические и (или) экспериментальные методы исследований к конкретной научной задаче и интерпретировать полученные результаты
ПК-3 Способен проверять корректность математического доказательства, строить логически последовательные цепочки рассуждений	ПК-3.1 Способен к формальной записи рассуждения в терминах логики предикатов
	ПК-3.2 Владеет понятием о математически строгом доказательстве, способен различать строгие и нестрогие рассуждения
	ПК-3.3 Способен выявлять использованные при доказательстве предположения и предпосылки, в том числе неявные, и контролировать их корректность

2. Показатели оценивания компетенций

В результате изучения дисциплины «Семинар по топологии I» обучающийся должен:

знать:

Основные понятия топологии и, более детально, теории поверхностей.

уметь:

Разбирать конкретные примеры и проводить необходимые вычисления.

владеть:

Свободно владеть техническим инструментарием, необходимым для самостоятельной работы с топологическими и метрическими пространствами.

3. Перечень типовых (примерных) вопросов, заданий, тем для подготовки к текущему контролю

С целью контроля освоения обучающимися учебного материала проводится устный опрос в начале занятия по материалу предыдущего занятия.

4. Перечень типовых (примерных) вопросов и тем для проведения промежуточной аттестации обучающихся

1. Задачи на понятия топологического пространства, непрерывного отображения, гомеоморфизма
2. Задачи на компактность, связность, линейную связность, хаусдорфовость
3. Задачи о метрических пространствах и топологии, порожденной шарами.
4. Задачи на основные производные конструкции: дизъюнктное объединение, декартово произведение, фактор-пространство, конус, надстройку, джойн.
5. Вычисление топологических характеристик в категория кусочно-линейных многообразий.
6. Задачи о топологии простейших многообразий: сфера, проективное пространство, тор.
7. Задачи о поверхностях (сфера с ручками, лист Мебиуса, бутылка Клейна). Вычисление и применение эйлеровой характеристики
8. Задачи на топологическую классификацию поверхностей.
9. Задачи о гомотопиях и гомотопической эквивалентности.
10. Теорема Брауэра о неподвижной точке и ее применение в задачах.
11. Задачи на вычисление фундаментальной группы.
12. Задачи на накрытия. Универсальная накрывающая.
13. Задачи о векторных полях на плоскости и на поверхностях. Вычисление и использование индекса векторного поля

Пример зачетного задания:.

- 1) Построение примеров конечных дискретных топологических пространств, обладающих различными свойствами отделимости.
- 2) Вычисление фундаментальной группы конечномерного тора.

Критерии оценивания

Зачет выставляется при условии получения оценки не ниже «хорошо (5)» по следующим критериям:

- оценка «отлично (10)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение уверенно применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (9)» выставляется студенту, показавшему всесторонние, систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, свободное и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «отлично (8)» выставляется студенту, показавшему всесторонние систематизированные, глубокие знания учебной программы дисциплины и умение применять их на практике при решении конкретных задач, и правильное обоснование принятых решений;
- оценка «хорошо (7)» выставляется студенту, если он твердо знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (6)» выставляется студенту, если он знает материал, грамотно и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;
- оценка «хорошо (5)» выставляется студенту, если он знает материал, и по существу излагает его, умеет применять полученные знания на практике, но допускает в ответе или в решении задач некоторые неточности;

- оценка «удовлетворительно (4)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «удовлетворительно (3)» выставляется студенту, показавшему фрагментарный, разрозненный характер знаний, недостаточно правильные формулировки базовых понятий, нарушения логической последовательности в изложении программного материала, но при этом он владеет фрагментарно основными разделами учебной программы, необходимыми для дальнейшего обучения и может применять полученные знания по образцу в стандартной ситуации;
- оценка «неудовлетворительно (2)» выставляется студенту, который не знает большей части основного содержания учебной программы дисциплины, допускает грубые ошибки в формулировках основных понятий дисциплины и не умеет использовать полученные знания при решении типовых практических задач;
- оценка «неудовлетворительно (1)» выставляется студенту, который не знает формулировок основных понятий дисциплины.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности

Во время проведения зачета обучающимся запрещается пользоваться помощью других лиц и мобильными телефонами, разрешается пользоваться программой учебной дисциплины и справочной литературой по выбору преподавателя.